حل معادله هلمهولتز با استفاده از توابع پایه تعمیم‌یافته

نیما نورمحمدی[۱]، بیژن برومند[۲]

دانشگاه صنعتی اصفهان، دانشکده مهندسی عمران

Boromand@cc.iut.ac.ir

خلاصه

در این مقاله روشی جدید بر مبنای استفاده از توابع پایه برای حل عددی معادله هلمهولتز ارائه شده است. روند معمول این روش‌ها تخمین پاسخ همگن مسئله به صورت ترکیب خطی توابع صدق‌کننده در اپراتور آن است. روش حاضر از توابعی به عنوان پایه‌های حل استفاده می‌کند که در اپراتور مسئله صادق نیستند. در این حالت به جای ارضای دقیق صورت همگن معادله، از ارضای تقریبی صورت انتگرال وزنی آن استفاده می‌شود. حاصل انتگرال ذکر شده یک معادله ماتریسی است که ضرایب سری پاسخ باید عضو فضای پوچ ماتریس ضرایب آن باشند. به این ترتیب پایه‌های جدیدی قابل ساخت هستند که قادرند صورت همگن معادله را به شکل تقریبی برآورده سازند. پایه‌های اولیه مورد استفاده از جنس چندجمله‌ای-های چبی‌شف و وزن‌های به کار رفته از نوع توابع نمایی انتخاب می‌شوند.

کلمات کلیدی: معادله هلمهولتز، توابع چبی‌شف، توابع نمایی

۱. مقدمه

حل معادلات دیفرانسیل کلید اصلی در حل بسیاری از مسائل مهندسی می‌باشد. از این رو روش‌های گوناگونی توسط محققین در طول سالیان متمادی برای حل آن‌ها توسعه یافته است. از جمله روش‌هایی که در سال‌های اخیر به علت توسعه کامپیوترهای قدرتمند رشد چشمگیری داشته‌اند روش‌های عددی می‌باشند. انعطاف‌پذیری آن‌ها در حل انواع مسائل در نواحی متنوع، آن‌ها را بر سایر روش‌های موجود برتری داده است. دسته‌ای از روش‌های عددی که در میان این گروه خصوصیات منحصر به فردی دارند روش‌های استفاده از توابع پایه می‌باشند. در این روش‌ها حل همگن به صورت ترکیب خطی تعدادی تابع صدق‌کننده در اپراتور مسئله تخمین زده می‌شود. از این رو تنها مرحله لازم در حل با این روش‌ها، اعمال شرایط مرزی به سری پاسخ می‌باشد. از جمله موارد با سابقه در این زمینه می‌توان به روش ترفتز اشاره نمود که در ۱۹۲۶ میلادی توسط ترفتز ابداع گردید [۱]. تا کنون این روش برای حل مسائل بسیاری از جمله مسائل پتانسیل [۱و۲]، مسئله بای‌هارمونیک [۲] و مسائل الاستیسیته و پلاستیسیته [۳] استفاده شده است. همچنین روش معروف حل‌های اساسی در این زمره قرار دارد که از آن برای حل اپراتورهای هلمهولتز [۴و۵]، الاستیسیته [۴و۶]، بای هارمونیک [۴و۵]، مسائل انتشار موج [۷] و ... بهره گرفته شده است. در سال‌های اخیر روش دیگری تحت عنوان روش توابع پایه هموار نمایی به این گروه افزوده شده که قابلیت فرمول-بندی برای حل اپراتورهای متعددی از جمله اپراتورهای ذکر شده در سطرهای فوق را دارد [۱۳-۸].

در کلیه روش‌های کلاسیک این مجموعه یک ضعف مشترک مشاهده می‌شود و آن نیاز به پایه‌های صدق‌کننده در اپراتور مسئله برای تشکیل سری پاسخ است. به همین دلیل گستره مسائل قابل حل با این روش‌ها به معادلات دارای ضرایب ثابت محدود می‌شود. در این مقاله تشکیل سری پاسخ مسئله با استفاده از توابعی است که در اپراتور آن صادق نیستند. به همین دلیل این روش قابلیت برنامه‌ریزی برای حل معادلات کلی‌تر را نیز دارد.

در این راستا در بخش دوم ابتدا معرفی مختصری از مسئله هلمهولتز و موارد کاربرد آن ارائه می‌شود. بخش سوم با توسعه روابط کلی لازم برای ارضای صورت همگن مسئله، به معرفی پایه‌ها و وزن‌های لازم می‌پردازد. بخش چهارم به چگونگی اعمال شرایط مرزی به سری پاسخ اختصاص یافته است و بخش پنجم روش کلی برآورد حل اختصاصی مسئله را ارائه داده است. در بخش ششم مثال‌هایی برای نشان دادن توانایی روش ارائه خواهد شد.

۲. معادله هلمهولتز

معادله زیر به افتخار هرمان ون هلمهولتز، به نام معادله هلمهولتز شناخته می‌شود:

$$(\nabla^2 + k^2)u = p \qquad (1)$$

---

[۱] دانشجوی دکترای عمران- سازه دانشگاه صنعتی اصفهان

[۲] استاد دانشگاه صنعتی اصفهان