

درباره ۲- همبندی گراف توان گروه‌های ساده

*،** نرگس اکبری، دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی-جبر، دانشگاه کاشان، nargesakbari۱۳۹۱@gmail.com

علی رضا اشرفی، عضو هیأت علمی گروه ریاضی، دانشگاه کاشان، ashrafi@kashanu.ac.ir

چکیده: گراف توان یک گروه متناهی، گرافی است که مجموعه رئوس آن عناصر گروه می‌باشد و دو رأس g و h از این گراف مجاورند اگر و تنها اگر یکی برابر توانی از دیگری باشد. این مقاله به مطالعه ۲-همبندی گراف‌های توان گروه‌های ساده پراکنده، گروه‌های ساده ری نوع ${}^2F_4(q)$ و گروه‌های تصویری $PSL(3, q)$ می‌پردازد. کلمات کلیدی: گراف توان، گروه ساده پراکنده، گروه ساده ری نوع ${}^2F_4(q)$ ، گروه تصویری $PSL(3, q)$ ، ۲-همبندی.

مقدمه و مفاهیم اولیه

این مسئله که چه هنگام گراف توان یک گروه دوری کامل است از جمله مسائلی است که بلافاصله بعد از تعریف این گراف به ذهن متبادر می‌شود. در قضیه زیر چاکرabortی ([۱])، و دیگران به این سؤال پاسخ داده‌اند. **قضیه ۲.** گراف توان $P(G)$ کامل است اگر و تنها اگر G یک p -گروه دوری باشد.

به سادگی می‌توان دید که اگر G یک گروه متناهی و $x \in G$ آن‌گاه

$$\deg(x) = |\{g \in G / \langle g \rangle \leq \langle x \rangle \text{ یا } \langle g \rangle < \langle x \rangle\}| - 1$$

در ادامه نیاز داریم تا روابطی برای محاسبه درجه رئوس در گراف توان داشته باشیم. یکی از این روابط که بسیار مورد استفاده ما خواهد بود نتیجه‌ای از پورقلی و دیگران است که در ([۵]) به اثبات رسیده است.

لم ۳. فرض کنید Z_n گروه دوری از مرتبه n باشد. در این صورت داریم:

$$\deg(x) = o(x) + \sum_{ko(x)|n, k \neq 1} \varphi(ko(x)) - 1$$

فرض کنید G یک گروه متناهی است. گراف توان $P(G)$ گرافی است با مجموعه رئوس G که در آن دو عنصر متمایز x و y مجاورند اگر و تنها اگر یکی از آن‌ها توانی از دیگری باشد.

گراف توان سره که با حذف رأس همانی از $P(G)$ به دست می‌آید با $P^*(G)$ نشان داده می‌شود. در واقع $P^*(G) = P(G) - \{e\}$. درجه x در گراف توان را با $\deg(x)$ و مجموعه مرتبه‌های عناصر G را با $\pi_e(G)$ نشان می‌دهند. رأس برشی در یک گراف، رأسی است که حذف آن موجب افزایش تعداد مولفه‌های همبندی گراف می‌گردد. گراف Γ ، ۲-همبند گفته می‌شود هرگاه رأس برشی نداشته باشد.

لم ۱. ([۱]) گراف توان $P(G)$ کامل است اگر و تنها اگر برای هر دو زیرگروه دوری G_1 و G_2 از G داشته باشیم $G_1 \subseteq G_2$ یا $G_2 \subseteq G_1$.