دستگاه‌های مستوی کنترل روی جبرهای لی سه بعدی و شش بعدی

سید محمد شهیدی
دانشکده علوم پایه، دانشگاه مراغه، مراغه، ایران
mamad-423@yahoo.com

چکیده

دستگاه‌های مستوی کنترل ناوردای چپ تشکیل یک رده کارآمد در بسیاری از فرایندهای کنترلی می‌دهد. در این مقاله ما تحت جداسازی موضعی بازخوردهای هم‌ارز برای دستگاه‌های مستوی کنترل ناوردای چپ تمام رتبه که توسیعشان روی گروه‌های لی سه بعدی نیم‌ساده است را رده‌بندی می‌کنیم. با استفاده از آن، به رده‌بندی زیرفضاهای مستوی جبرهای لی وابسته پرداخته می‌شود. از این رو ما فقط نیاز داریم زیرفضاهای مستوی روی جبرهای لی $\mathfrak{so}(3)$ و $\mathfrak{so}(4)$ را رده‌بندی کنیم. این روند منجر به یافتن مجموعه سطوح تراز در جبرهای لی $\mathfrak{so}(3)$ و $\mathfrak{so}(4)$ می‌شود، که به ترتیب مربوط به عمل تعدی خودریختی‌های جبرهای لی است.

واژگان کلیدی : دستگاه کنترل هموار؛ دستگاه مستوی کنترل ناوردای چپ؛ دستگاه همگن؛ کلاف مماس؛ کنترل قابل قبول.

Mathematics Subject Classification 2010: 93A10; 93B17; 93B27.

۱. پیش‌گفتار

یک دستگاه مستوی کنترل ناوردای چپ Σ یک دستگاه کنترل با ساختار $\dot{g} = g\Xi(1,u) = g(A + u_1 B_1 + \cdots + u_\ell B_\ell)$، $g \in \mathsf{G}$، $u \in \mathbb{R}^\ell$ که G یک گروه لی متناهی‌بعد حقیقی با جبر لی $\mathfrak{g}$ می‌باشد و $A, B_1, \ldots, B_\ell \in \mathfrak{g}$. نگاشت $\Xi(1,\cdot) : \mathbb{R}^\ell \to \mathfrak{g}$ یک نگاشت مستوی یک به یک است، $B_1, \ldots, B_\ell$ مستقل خطی هستند. $g\Xi(1,u)$ حاصل‌ضرب $T_1 L_g \cdot \Xi(1,u)$ می‌باشد که $L_g : \mathsf{G} \to \mathsf{G}$ و $h \mapsto gh$ توسط g هم‌دسته چپ می‌باشد. نگاشت $\Xi : \mathsf{G} \times \mathbb{R}^\ell \to T\mathsf{G}$ با ضابطه $\Xi(g,u) = g\Xi(1,u)$ تحت هم‌دسته چپ، ناوردا می‌باشد. ما باید یک دستگاه بصورت $\Sigma = (\mathsf{G}, \Xi)$ تعریف کنیم. کنترل‌های قابل قبول به صورت نگاشت‌های $u(\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}^\ell$ پیوستگی تکه‌ای هستند. یک مسیر برای کنترل قابل قبول $u(\cdot)$، یک خم مطلقاً پیوسته به شکل $g(\cdot) : [0,T] \to \mathsf{G}$ که $\dot{g}(t) = g(t)\Xi(1,u(t))$ و $t \in [0,T]$. دستگاه Σ قابل کنترل است اگر برای هر $g_0, g_1 \in \mathsf{G}$ مسیر $g(\cdot) : [0,T] \to \mathsf{G}$ وجود داشته باشد که $g(0) = g_0$ و $g(T) = g_1$. زیرفضای مستوی Γ از یک جبر لی $\mathfrak{g}$ به صورت زیر تعریف می شود: $\Gamma = A + \Gamma^0 = A + < B_1, B_2, \cdots, B_\ell >$ که $A, B_1, \cdots, B_\ell \in \mathfrak{g}$. فرض کنید Γ_1 و Γ_2 دو زیرفضای مستوی از $\mathfrak{g}$ باشند، Γ_1 و Γ_2 نیز ξ-هم‌ارز هستند اگر یک خودریختی جبر لی $\psi \in \mathsf{Aut}(\mathfrak{g})$ که $\psi \cdot \Gamma_1 = \Gamma_2$. ξ-هم‌ارزی یک رابطه هم‌ارزی اصلی (حقیقی) است. زیرفضای مستوی Γ می‌تواند تمام رتبه باشد اگر یک جبر لی کامل تولید کند. کوچکترین جبر لی شامل Γ، $\mathfrak{g}$ می‌باشد. قابل ذکر است که ویژگی تمام رتبه بودن تحت ξ-هم ارزی، ناوردا می‌باشد. برای ξ-هم ارز بودن Γ_1 و Γ_2 لازم است که هم‌بعد باشند و این که $0 \in \Gamma_1$ اگر و فقط اگر $0 \in \Gamma_2$. Γ یک زیرفضای مستوی ℓ-بعدی است چنان که یک زیرفضای $(\ell,0)$-مستوی باشد که $0 \in \Gamma$ و یک زیرفضای $(\ell,0)$-مستوی باشد.

تعریف ۱.۱. روش‌های مختلفی برای رده‌بندی جبرهای لی سه بعدی وجود دارد. از جمله لی[1] *[۳]*، بیانچی[2] *[۵]* و بئر[3] *[۶]* که نهایتاً روش استانداردی به نام روش متعارف *"Bianchi-Behr"* منسوب شد. پایه مرتب (E_1, E_2, E_3) را داریم، عمل جابجایی از روابط زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} [E_2, E_3] &= n_1 E_1 - a E_2 \\ [E_3, E_1] &= a E_1 + n_2 E_2 \\ [E_1, E_2] &= n_3 E_3 \end{aligned}$$

به عنوان مثال برای جبرهای لی $\mathfrak{so}(2,1)$ و $\mathfrak{so}(3)$ داریم:

$$\begin{aligned} \mathfrak{so}(2,1) &: a = 0 \text{ و } n_1 = 1 \text{ و } n_2 = 1 \text{ و } n_3 = -1 \\ \mathfrak{so}(3) &: a = 0 \text{ و } n_1 = 1 \text{ و } n_2 = 1 \text{ و } n_3 = 1 \end{aligned}$$

مثال ۲.۱. پایه مرتب (E_1, E_2, E_3) را برای جبر لی $\mathfrak{g}_{3.1}$ [4] *[۴]* (جبر لی هیزنبرگ) داریم، عمل جابجایی از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$[E_2, E_3] = E_1 \quad [E_3, E_1] = 0 \quad [E_1, E_2] = 0$$

[1] S. Lie (1893)
[2] L. Bianchi (1918)
[3] C. Behr(1968)
[4] Heisenberg Agebra