بررسی ویژگی‌ها و انژکتیو بودن مدول $L_D(M)$ و نتایج آن

میرصادق سیدصادقی
مربی، هیات علمی گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۳۶۹۷، تهران، ایران
msayedsadeghi@gmail.com

چکیده

فرض کنیم A یک حلقه نوتری و d یک عدد صحیح نامنفی باشد. برای هر عدد صحیح نامنفی i و هر A-مدول M، i-امین d-کوهمولوژی مدول $H_d^i(M)=\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Sigma}\mathrm{Ext}_A^i(A/\mathfrak{a},M)$ که در آن Σ مجموعه تمام ایده‌آل‌هایی مانند $\mathfrak{a}$ از A با ویژگی $\dim(A/\mathfrak{a})\leq d$ است را تعریف و بعضی از ویژگی‌های آن را بیان و اثبات می‌کنیم.

واژگان کلیدی : انژکتیو؛ دوهم‌بعد؛ فانکتور.

Mathematics Subject Classification 2010: 13A30; 13A99; 13D45.

۱. پیش‌گفتار

در سراسر این مقاله، فرض می‌کنیم A حلقه جابجایی و نوتری، M یک A-مدول، d یک عدد صحیح نامنفی و Σ مجموعه تمام ایده‌آل‌هایی مانند $\mathfrak{a}$ از A با ویژگی $\dim(A/\mathfrak{a})\leq d$ باشد. در این صورت فانکتور $L_d(-)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$L_d(M)=\{m\in M|\dim(Am)\leq d\}.$$

به راحتی می‌توان نشان داد که

$$L_d(M)=\{m\in M|\exists\mathfrak{a}\in\Sigma;\ \mathfrak{a}m=0\}.$$

همچنین بنا به قضیه ۱.۲.۱۱ از [۴] می‌توان گفت که

$$L_d(M)=\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Sigma}\mathrm{Hom}_A(A/\mathfrak{a},M).$$

به وضوح L_d یک فانکتور هموردا خطی دقیق چپ در کاتگوری A-مدول‌ها است و i-امین فانکتور مشتق شده راست آن را برای هر $i\in\mathbb{N}_0$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$H_d^i(M)=\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Sigma}\mathrm{Ext}_A^i(A/\mathfrak{a},M)$$

که در آن $H_d^0(M)=L_d(M)$. به راحتی می‌توان دید که

$$\forall i\in\mathbb{N}_0;\quad H_d^i(M)\cong\varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Sigma}H_{\mathfrak{a}}^i(M).$$

سی. بانیکا و ام. استویا در [۲]، مطالعاتی را درباره $H_d^i(M)$ انجام داده‌اند. همچنین آ. گروتندیک در [۵]، جی. هرزوگ و ای. کانز در [۶]، بیژن‌زاده در [۳] و احمدی و طوسی در [۱] و اخیراً نیز ان. زمانی، ام. اچ. بیژن‌زاده و ام. سیدصادقی در [۷]، مطالعاتی را در این خصوص انجام داده‌اند. ما در این مقاله نیز برخی ویژگی‌های آن را بیان و اثبات می‌کنیم.

۲. نتایج اصلی

تعریف ۱.۲. فرض کنیم M یک A-مدول دلخواه باشد. در این صورت مدول M را L_d-تابی می‌گوییم هرگاه $L_d(M)=M$.

به وضوح اگر $\dim(M)\leq d$، آنگاه M یک مدول L_d-تابی است. همچنین برای هر عدد صحیح $i\geq 0$، مدول $H_d^i(M)$ یک مدول L_d-تابی است.