برآوردگر بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی تحت تابع زیان نامتقارن

زهرا حقیقت نیا
دانشکده علوم پایه، گروه ریاضی، دانشگاه بناب
z.haghighatnia@gmail.com

مسعود یارمحمدی
گروه آمار، دانشگاه پیام نور، ایران
masyar@pnu.ac.ir

چکیده

در این مقاله برآوردگر بیزی پارامتر مقیاس توزیع نمایی تحت تابع زیان متقارن مربع خطا و تابع زیان نامتقارن لاینکس مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه ضمن ارائه روش برآوردگر بیزی، اقدام به برآورد پارامتر مقیاس توزیع نمایی تحت تابع زیان مربع خطا و همچنین تابع زیان لاینکس خواهد شد، که هدف اصلی این مقاله می‌باشد.

واژگان کلیدی : برآوردگر بیزی؛ توزیع پسین؛ توزیع گاما؛ توزیع نمایی.

۱. پیش‌گفتار

یکی از توزیع‌های آماری که نقش مهمی در کاربرد علم آمار ایفا می‌کند، توزیع نمایی [۱] می‌باشد. متغیرهای تصادفی توزیع شده به صورت نمایی در موارد گوناگون نظیر مطالعه زمان پوسیدگی ذرات رادیواکتیو مفید می‌باشند. این متغیرها همچنین در بسط الگوهایی که دارای انواع دیگری از زمان انتظار هستند، مانند زمانی که طی آن قطعه‌ای از یک وسیله از کار می‌افتد، زمانی که برای تکمیل کار طول می‌کشد و یا زمانی که طی آن یک مشتری جدید پیدا می‌شود، نیز می‌توانند مفید باشند[۲].

فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ نمونه تصادفی به اندازه n از توزیع نمایی با میانگین θ باشد، به طوری که چگالی آن به صورت زیر باشد:

$$f_X(x) = f_X(x;\theta) = \frac{1}{\theta}\, e^{\frac{-x}{\theta}}$$

که در آن پارامتر مقیاس θ می‌باشد. مقدار اولیه پیشنهادی برای θ در یک برآورد نقطه‌ای، θ_0 معلوم می‌باشد که از داده‌های گذشته یا از بعضی منابع معتبر گرفته شده است. برآورد نااریب θ بصورت زیر است[۱]

$$\bar{x} = \frac{T}{n} \quad , \quad T = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{و} \qquad T = \sum_{i=1}^{n} x_i \sim \Gamma(n,\theta)$$

۲. برآورد بیزی برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی

در بخش قبلی در مورد برآوردگر بیزی توضیح داده شده است در ادامه نیز برآوردگر بیزی را برای پارامتر مقیاس توزیع نمایی برآورد خواهیم کرد.

قضیه ۱.۲. فرض کنید $x_1, x_2, \ldots, x_n$ یک نمونه تصادفی n تایی از توزیع $exp(\theta)$ باشد. نشان دهید یک برآوردگر بیزی برای پارامتر θ دارای توزیع پسین $Gamma(\alpha,\beta)$ به صورت زیر می‌باشد[۱].

اثبات.

$$f_\theta(x_i) \propto \lambda\, e^{-\lambda\, x_i} \qquad , \qquad i = 1, \ldots, n$$
$$f_\theta(x_i) \propto \lambda^n\, e^{-\lambda \sum_{i=1}^{n} x_i}$$
$$g(\theta) \propto \lambda^{\alpha-1}\, e^{-\lambda\theta}$$

[۱] Exponential distribution