متعادل کردن قدرتمند و منطبق کردن کلاسی از سیستم‌های آشفته مرتبه کسری به وسیله کنترل‌کننده کسری جدید لغزشی یا متحرک

سعید میرزاجانی
مربی، علوم پایه، دانشگاه پیام نور، صندوق پستی ۱۹۳۹۵-۳۶۹۷ تهران، ایران
saeed_mirzajani@yahoo.com

چکیده

این مقاله مدل مرتبه کسری جدید از چهارچوب لغزشی یا متحرک را برای رسیدن به پایداری و منطبق کردن کلاسی از سیستم‌های آشفته مرتبه کسری ارائه می‌دهد. بر پایه محاسبات کسری انتگرال پایدار از نوع مرتبه کسری لغزشی روی سطوح معرفی می‌شود که اطمینان حاصل کند که حرکت‌های لغزشی در زمان متناهی وجود دارد. روش کنترلی معرفی شده برای پایداری کلاسی از سیستم‌های آشفته مرتبه کسری در حضور مدل‌های مبهم و اختلالات خارجی به کار می‌رود.

واژگان کلیدی : سطوح لغزشی مرتبه کسری؛ سیستم‌های آشفته؛ متعادل کردن.

۱. پیش‌گفتار

در سال‌های اخیر آشفتگی و سیستم‌های آشفته بسیار مورد علاقه پدیده‌های دینامیکی غیرخطی بوده است. یک سیستم آشفته غیر قابل پیش‌بینی بوده و حرکت‌های نامنظم در فضای فازی نشان می‌دهد هر چند که سیستم‌های آشفته نسبت به شرایط اولیه و متغیرهای پارامتری سیستم بسیار حساس هستند تا به حال سیستم‌های آشفته زیادی با رفتارهای متغیر معرفی شده‌اند مانند سیستم Arneodo Chen، Lorenz، و ....

به علت وجود آشفتگی در سیستم‌های حقیقی و کاربردهای مفید آن در فیزیک و مهندسی، علاقه روز افزون در زمینه کنترل و منطبق کردن سیستم‌های آشفته در سال‌های اخیر وجود دارد.

محاسبات کسری با تاریخچه حدوداً ۳۰۰ ساله، تضمینی از دیفرانسیل معمولی و انتگرال‌گیری اختیاری از هر مرتبه است هر چند که تاریخچه زیادی دارد در ۳ دهه اخیر در فیزیک و مهندسی کاربرد داشته است.

ابتدا بعضی تعاریف از محاسبات کسری و قضیه پایداری مرتبه کسری ارائه می‌شود سپس الگوریتم عددی برای حل معادلات دیفرانسیل مرتبه کسری ارائه می‌شود.

تعریف ۱.۱. انتگرال کسری ریمن لیویل از مرتبه α برای تابع $f(t)$ به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$ {}_{t_0}I_t^{\alpha} f(t) = {}_{t_0}D_t^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_0}^{t} \frac{f(t)}{(t-t_0)^{1-\alpha}} dt $$

که $\Gamma(0)$ همان تابع گاماست.

تعریف ۲.۱. فرض کنید $m-1 < \alpha \leq m$ و $m \in N$. مشتق کسری ریمن لیویل از مرتبه α برای تابع $f(t)$ به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$ {}_{t_0}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{d^{\alpha} f(t)}{dt^{\alpha}} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \cdot \frac{d^m}{dt^m} \int_{t_0}^{t} \frac{f(t)}{(t-t_0)^{\alpha-m+1}} dt. $$

قضیه ۳.۱. سیستم مرتبه کسری خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$ D^{\alpha} x = Ax \qquad x(0) = x_0 $$

که $0 < \alpha < 1$ و $x \in R^n$ و $A \in R^{n\times n}$. این سیستم به طور مجانبی پایدار است اگر و فقط اگر

$$ |arg\ (eig\ A)| > \frac{\alpha\pi}{2}. $$

قضیه ۴.۱. فرض کنید $x = 0$ یک نقطه تعادل برای هر کدام از سیستم‌های غیر مستقل کاپوتو یا سیستم غیرمستقل ریمن لیویل باشد

$$ D^{\alpha} x(t) = f(x,t) $$

که در آن $f(x,t)$ شرط لیپ شیتس را ایجاب می‌کند. با ثابت $L > 0$ و $\alpha \in (0,1)$، فرض کنید که تابع لیاپانوف $v(t,x(t))$ وجود دارد به طوری که

$$ \alpha_1 ||x||^a \leq v(t,x) \leq \alpha_2 ||x|| $$

$$ \dot{v}(t,x) \leq -\alpha_3 ||x|| $$

که در آن α_1، α_2، α_3 و a ثابت‌های مثبت می‌باشند و $||.||$ یک نرم دلخواه است.