# انعطاف‌ناپذیری گراف

حسین مهدیون * — دانشگاه زنجان
محمدرضا قائمی — دانشگاه زنجان
مژگان حسن‌زاده — دانشگاه زنجان

**چکیده**

انعطاف‌ناپذیری یکی از ویژگی‌های گراف است که در مسائل عملی به ویژه ساختارهای مولکولی از گراف‌های شیمیایی، شبکه‌های حسی و همچنین مهندسی سازه‌ها کاربرد فراوان دارد. گراف ساده $G=(V,E)$ را انعطاف‌ناپذیر گویند هرگاه وارد کردن فشار بر ساختار گراف چارچوب کلی آن را تغییر ندهد و یا به‌عبارت دیگر باعث ایجاد خمیدگی در یال‌ها نشود. در این مقاله شرایط مورد نیاز برای انعطاف‌ناپذیری گراف و حداقل تعداد یال‌های لازم برای این امر را بررسی می‌کنیم و در ادامه الگوریتمی برای تعیین انعطاف‌ناپذیری گراف در صفحه ارائه می‌کنیم که آن را الگوریتم انعطاف[1] نامیده‌ایم. همچنین مفهوم دسته‌بندی گراف‌ها را تعریف و با استفاده از شرایط انعطاف‌ناپذیری دسته‌ای از گراف‌ها را که قابل تجزیه به گراف‌های انعطاف‌ناپذیر هستند مورد بررسی قرار می‌دهیم.

**واژه‌های کلیدی:** انعطاف‌ناپذیری، ساختار گراف.

## ۱ مقدمه

اولین بار مفهوم انعطاف‌ناپذیری چارچوب یک گراف در ریاضیات توسط اویلر[2] در سال ۱۷۷۶ مطرح شد. اویلر گراف $G$ را انعطاف‌ناپذیر خواند اگر چارچوب حاصل از وارد کردن هر فشار به ساختار $G$، با چارچوب اولیه $G$ همنهشت باشد. در این مقاله بحث ما حول چارچوب‌ها در فضای دوبعدی یا $R^2$ خواهد بود. منظور از یک چارچوب برای گراف $G=(V,E)$، مجموعه‌ای از رأس‌ها و اتصال‌های بین آن‌ها یا همان یال‌ها در $G$ است.

**تعریف ۱.۱.** یک **چارچوب** از گراف $G$ را با زوج $(G,p)$ نمایش می‌دهیم که، $G=(V,E)$ یک گراف بدون جهت و $p$ یک نگاشت از $V$ به فضای $R^2$ است، طوری‌که برای هر $uv\in E$ داشته باشیم: $p(u)\neq p(v)$

منظور از $p(v)$ برای هر رأس $v\in V$، مختصات محل قرار گرفتن رأس $v$ در صفحه است. در این مقاله چارچوب‌ها در فضای دو بعدی بررسی می‌شوند و یال‌ها به صورت خطوط راست در صفحه هستند و همچنین طول هر یال $uv\in E$ را فاصله اقلیدسی بین دو نقطه $p(u)$ و $p(v)$ در صفحه در نظر می‌گیریم.

**تعریف ۲.۱.** دو چارچوب $(G,p_0)$ و $(G,p_1)$ را **معادل** گوییم، هرگاه برای هر یال $uv\in E$، طول این یال در هر دو چارچوب یکسان باشد و آنها را **همنهشت** گوییم، هرگاه برای هر دو رأس $u,v\in V$ فاصله دو رأس در هر دو چارچوب باهم برابر باشد، حتی اگر یالی بین آنها نباشد. به عبارت دیگر

$$\forall\, u,v\in V \qquad \|p_0(u)-p_0(v)\| = \|p_1(u)-p_1(v)\|$$

* سخنران

[1] rigidity algorithm
[2] Euler