ساختار گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های متناهی با گروه جمعی دوری

عادل تدین‌فر*
دانشگاه کاشان

علی‌رضا اشرفی
دانشگاه کاشان

چکیده

هدف این مقاله تعیین ساختار گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌های متناهی با گروه جمعی دوری است. ثابت خواهد شد که چنین گراف‌هایی را می‌توان به‌عنوان زیرگراف القایی از ضرب تانسوری G-جمع روی گراف‌های شناخته شده‌ای بیان کرد.

واژه‌های کلیدی: گراف مقسوم علیه صفر، G-جمع، ضرب تانسوری
Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

مفهوم گراف مقسوم‌علیه صفر یك حلقه توسط بك در مطالعه روی مسئله‌ی رنگ‌پذیری حلقه‌های جابه‌جایی معرفی شد [۴]. او حلقه‌ی R را به‌عنوان مجموعه رئوس گراف $G(R)$ در نظر گرفت و دو رأس متمایز x و y را مجاور نامید، هرگاه حاصل‌ضربشان صفر شود. اندرسون و لیوینگستون [۱]، به‌منظور ساده‌سازی گراف مقسوم‌علیه صفر بك، مجموعه‌ی همه‌ی مقسوم‌علیه‌های صفر ناصفر را به‌عنوان مجموعه رئوس در نظر گرفتند. آن‌ها یال‌ها را نیز مشابه آن‌چه که بك اختیار کرده بود، تعریف کردند و این گراف را با $\Gamma(R)$ نشان دادند. در این مقاله از تعریف اندرسون-لیوینگستون برای گراف مقسوم‌علیه صفر استفاده کرده و هیچ‌یك از حلقه‌ها را دامنه در نظر نمی‌گیریم. خوانندگان علاقه‌مند را برای مطالعه‌ی بیش‌تر در این زمینه به [۶] راه‌نمایی می‌کنیم.

در [۷، ۲]، رده‌بندی حلقه‌های متناهی از اندازه‌ی $p^۲$ و $p^۳$ ارائه شده است. به‌علاوه در [۷] رده‌بندی حلقه‌های متناهی که اندازه‌ی آن‌ها خالی از مربع کامل می‌باشد، آورده شده است. هدف این مقاله مشخص کردن گراف مقسوم‌علیه صفر حلقه‌هایی است که گروه جمعی آن‌ها دوری است.

گراف‌های کامل و تهی روی n رأس را، به‌ترتیب، با K_n و Φ_n نشان می‌دهیم. هم‌چنین از K_∞ برای نشان دادن گراف کامل روی مجموعه رئوس نامتناهی شمارا استفاده می‌کنیم. حلقه‌ی اعداد صحیح به‌پیمانه‌ی n را با Z_n نشان داده و منظور از $C_n(۰)$ حلقه‌ی دیگری با همان عناصر و عمل جمع، ولی با ضرب بدیهی است. جمع $G+H$ از گراف‌های G و H با مجموعه رئوس مجزای، به‌ترتیب، $V(G)$ و $V(H)$ را چنین تعریف می‌کنیم: رئوس $G+H$ همان رئوس G و H بوده و یال‌های این گراف عبارت است از یال‌های G و یال‌های H به‌همراه تمام یال‌هایی که یك رأس از G را به یك رأس از H متصل می‌سازد. $V(G)$ و $V(H)$ را به‌هم متصل می‌سازند. اکنون فرض کنیم $G_۱$، $G_۲$، $\cdots$، G_k گراف‌هایی با رئوس متمایز باشند. جمع دنباله‌ای $G_۱+G_۲+\cdots+G_k$ را به‌صورت $(G_۱+G_۲)\cup(G_۲+G_۳)\cup\cdots\cup(G_{k-۱}+G_k)$ تعریف می‌کنیم.

* سخنران