



نگاشت همساز بین رویه ریمانی و گروه لی

مصطفی محمدحسن*
دانشگاه تربیت مدرس

چکیده

در این نوشته سعی شده است تا شرایط همساز^۱ بودن نگاشت‌ها بین رویه‌ی ریمانی و گروه‌های لی با استفاده از فرم کارتان را بررسی کنیم و در نهایت با استفاده از هموستار القایی بر کلاف برگردان f^*TG بر رویه ثابت می‌شود که شرط همساز بودن هم‌ارز صفر شدن دیورژانس^۲ فرم کارتان بر رویه خواهد بود.

واژه‌های کلیدی: رویه‌ی ریمانی، گروه لی، نگاشت همساز

۱ مقدمه

دو خمینه‌ی ریمانی (می‌توان شبه‌ریمانی در نظر گرفت) (M^m, g) و (N^n, h) را در نظر می‌گیریم. مختصات موضعی بر M را به صورت (x^1, \dots, x^m) و بر N را به صورت (y^1, \dots, y^n) مشخص می‌کنیم و ضرایب متریک بر M را با g_{ij} و بر N را با $h_{\alpha\beta}$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۱. نگاشت هموار $\varphi: M \rightarrow N$ را همساز نامیم هرگاه نقطه‌ی بحرانی در وِردش^۳ اول تابع انرژی دیریکله $E(\varphi) = \int_D \frac{1}{2} |\varphi|^2 d\mu_g$ باشد که در آن D دامنه‌ی فشرده‌ی φ و $d\mu_g$ عنصر حجم ریمانی بر M است. در عبارت بالا نرم هیلبرت برابر است با

$$|\varphi|^2 = \sum_{i,j=1}^m \sum_{\alpha,\beta=1}^n g^{ij} h_{\alpha\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j}$$

تعاریف اولیه

هموستار لوی-چویتا^۴ بر M را با ∇^M و بر N را با ∇^N نشان می‌دهیم. برای $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ و $\omega \in \Omega^1(M)$ روی کلاف T^*M بر M هموستار لوی چویتای ∇^* با عمل $\nabla_X^* \omega(Y) = X\omega(Y) - \omega(\nabla_X Y)$ تعریف می‌کنیم. هموستار القایی بر کلاف برگردان φ^*TN به صورت ∇^{φ} نشان می‌دهیم و به صورت

$$\nabla_X^{\varphi} \frac{\partial}{\partial Y^i} \circ \varphi = \nabla_{d\varphi(X)}^N \frac{\partial}{\partial Y^i} \circ \varphi$$

* سخنران

^۱harmonic
^۲divergence
^۳variation
^۴Levi-Civita