



## روش های عددی انتگرال گیری نیوتن - کاتس مبتنی بر مشتق

سید شهریار عزیزی  
دانشگاه صنعتی ارومیهاحمد رضا حقیقی\*  
گروه ریاضی دانشگاه صنعتی ارومیه

## چکیده

در این مقاله برای روش انتگرال گیری نیوتن - کاتس، قواعد و فرمول های جدیدی با استفاده از مشتق بدست می آید که بسیار دقیق تر از فرمول های استاندارد نیوتن - کاتس هستند. در این روش از مقدار تابع و مقدار مشتق تابع روی بازه ی یکنواخت استفاده می شود. استفاده از مشتق اول در تمام نقاط بازه درجه ی دقت را تا  $2n+2$  افزایش می دهد؛ استفاده از مشتق اول فقط در نقاط پایانی بازه (ابتدا و انتهای بازه) از نظر دقت بین روش بالایی و روش استاندارد نیوتن - کاتس قرار می گیرد. استفاده از مشتق مراتب بالاتر از درجه ی دقت بالاتری برخوردار است؛ در انتها بامثالی نشان می دهیم چه تعداد محاسبه لازم است تا مقدار خطا از حد معینی کمتر شود.

واژه های کلیدی: انتگرال عددی، نیوتن - کاتس بسته، نقاط پایانی<sup>۱</sup> و مبتنی بر مشتق<sup>۲</sup>

Mathematics Subject Classification [2010]: 65D30, 65D32

## ۱ مقدمه

فرمول انتگرال گیری کلی به صورت زیر است:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i) \quad (1)$$

که  $x_0, x_1, \dots, x_n$ ،  $n+1$  نقطه مشخص انتگرال گیری روی بازه ی  $[a, b]$  هستند و  $w_i$  ها مجهولات هستند که باید تعیین گردند. با فرض این که نقاط انتگرال گیری به طور یکنواخت روی بازه توزیع شده باشند داریم:  $x_i = a + ih$  به طوری که  $h = \frac{b-a}{n}$ . با بدست آوردن بهترین مقدار ها برای  $w_i$  ها در فرمول (۱) می توان به بیشترین دقت برای این گونه فرمول ها دست یافت. مرسوم ترین روش برای تعیین  $w_i$  ها این است که در نظر بگیریم فرمول (۱) برای یک جمله ای  $x^k$  ( $k = 0, 1, \dots, p$ ) دقیق باشد، در این صورت با نوشتن فرمول (۱) برای  $x^0, x^1, \dots, x^p$  و بسط  $\sum$  یک دستگاه معادلات با  $p+1$  مجهول داریم، که با حل این دستگاه  $w_i$  ها تعیین می شوند و فرمول نیوتن-کاتس به ازای  $n$  های مختلف به دست می آید. در زیر چند نمونه ذکر شده است. [۱]

با فرض  $n = p$  و به ازای  $n = 1$  داریم:

قاعده ذوزنقه:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + f(x_1)) - \frac{h^3}{12}f''(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_1)$$

\* سخنران  
endpoint<sup>۱</sup>  
Derivative-based<sup>۲</sup>