مدول های دیووی راست

صادق صادقی وفا
دانشگاه یاسوج

محمد اندرزگو
دانشگاه یاسوج

چکیده

اگر M_R یک $R-$مدول راست تک پیاپی و آرتینی باشد، آن گاه M دیووی راست است. یک مدول دوری روی هرحلقه ی تعویض پذیر، دیوو است. هر مدول دیووی راست، ددکیند متناهی، هاپفی تعمیم یافته و هم هاپفی ضعیف است. هم چنین نشان خواهیم داد که هر مدول ضربی، دیووی راست است.

واژه‌های کلیدی: مدول های دیووی راست، حلقه ی منظم، ایدآل راست ماکسیمال.
Mathematics Subject Classification [2010]: 13D45, 39B42

۱ مقدمه

در این مقاله حلقه ها یکدار و مدول ها یکانی در نظر گرفته می شوند. زیر مدول N از $R-$مدول راست M را پایای کامل گوییم هرگاه برای هر $f \in \mathrm{End_R(M)}$ داشته باشیم $f(N) \subseteq N$. $R-$مدول راست M را دیوو گوییم در صورتی که هر زیر مدول از M پایای کامل باشد. جبردانانی مانند اسمیت و آقایف در سال ۲۰۰۶ مدول های دیوو را مورد بررسی قرار دادند.

تعریف ۱.۱. زیر مدول N از $R-$مدول راست M را پایای کامل گوییم هرگاه برای هر $f \in \mathrm{End_R(M)}$ داشته باشیم $f(N) \subseteq N$. $R-$مدول راست M را دیوو گوییم در صورتی که هر زیر مدول از M پایای کامل باشد. $R-$مدول راست M دیووی ضعیف نامیده می شود هرگاه هر جمعوند مستقیم از M پایای کامل باشد. مدول M تک پیاپی نامیده می شود در صورتی که برای هر دو زیر مدول L و Nاز M، $L \subseteq N$ یا $N \subseteq L$. مدول M هاپفی تعمیم یافته نامیده می شود هرگاه هر درون ریختی پوشا از M هسته ی کوچک داشته باشد. مدول M هم هاپفی ضعیف نامیده می شود در صورتی که هر درون ریختی یک به یک از M دارای نقش اساسی باشد. حلقه ی R ددکیند متناهی نامیده می شود هرگاه برای هر $a.b \in R$، $ab = ۱$ نتیجه دهد $ba = ۱$.

مثال ۲.۱. اگر M یک مدول راست ساده باشد، آن گاه (۰) و M زیر مدول های پایای کامل از M هستند. در نتیجه Mدیووی راست است.

قضیه ۳.۱. *فرض کنیم R یک حلقه باشد. در این صورت $R-$ مدول M دیوو است اگر و تنها اگر برای هر درون ریختی f از M و هر عضو m از M، rمتعلق به R وجود داشته باشد به طوری که $f(m) = mr$.*

اثبات. فرض کنیم f متعلق به حلقه ی درون ریختی M باشد. چون برای هر عضو از M مانند m، mR یک زیر مدول از M و M دیووی راست است، پس $f(m) \in f(mR) \subseteq mR$. بنابراین $r \in R$ وجود دارد به طوری که $f(m) = mr$. برعکس فرض کنیم N یک زیرمدول از M باشد. چون برای هر عضو از N مانند n، $r \in R$ وجود دارد به طوری که $f(n) = nr \in N$. در نتیجه $f(N) \subseteq N$. □