بررسی انتگرال‌مسیر سیستم‌های فرمیونی

مرتضی احمدی[۱]، مجتبی احمدی[۲]

[۱]دانشگاه شهید چمران اهواز، Mortezaahmadi1990@yahoo.com
[۲]دانشگاه شهید چمران اهواز ، Mojtabaahmadi_2007@yahoo.com

چکیده

در این نوشته به مطالعه و بررسی روش انتگرال‌مسیر به عنوان یکی از فرمولبندی‌های رایج مکانیک کوآنتومی پرداخته‌ایم. هدف اصلی ما در این کار، محاسبهٔ انتشارگر با استفاده از روش انتگرال‌مسیر برای یک سیستم فرمیونی، چه در شرایط نسبیتی و چه شرایط غیر نسبیتی است.

واژه‌های کلیدی

انتگرال‌مسیر، انتشارگر، عملگر آفرینش، سیستم فرمیونی، حالت‌های همدوس

مقدمه

ریچارد فاینمن در سال ۱۹۴۰/۱۳۱۹ یکی از ساده‌ترین اما در عین حال پرمعناترین روش‌ها را برای فرمولبندی مکانیک کوآنتومی ارائه نمود. این فرمول‌بندی با صورت‌بندی رایج آن زمان که فرمولبندی شرودینگری نام داشت، متفاوت بود [۱].

روش معرفی شده توسط فاینمن که امروزه با نام انتگرال‌مسیر فاینمن شناخته می‌شود، مبتنی بر استخراج انتشارگر بود و در برخی از مسایل فیزیکی به سادگی انتشارگر را بدست می‌داد. همچنین، این روش موجب ساده‌سازی پیچیدگی‌های نظریهٔ کوآنتومی گردید [۲].

روش فاینمن نیز به مانند هر روشی که برای حل یک مسئله به کار می‌رود، دارای ویژگی‌های مثبت و منفی خاص خود است. از جمله ویژگی‌های مثبت این روش می‌توان به محاسبهٔ انتشارگر بدون نیاز به محاسبهٔ ویژه‌حالت‌ها و ویژه‌مقادیر هامیلتونی اشاره کرد که منجر به افزایش سرعت عمل در حال مسائل می‌گردد. همچنین، از ویژگی‌های منفی این روش می‌توان به پیچیده کردن حل برخی از مسائل کوآنتومی اشاره کرد. پس از فاینمن، کلاودر روش انتگرال-مسیر را به فضای حالت‌های همدوس بسط داد[۳].

روش انتگرال‌مسیر کاربردهای متعددی در شاخههای گوناگون فیزیک مانند فیزیک مادهٔ چگال و نظریهٔ میدان‌ها دارد. همچنین، این روش را می توان حلقهٔ ارتباطی بین مکانیک آماری و مکانیک کوآنتومی نامید [۴].

در این نوشته کوشش کرده‌ایم شکل انتگرال‌مسیر را در فضای حالت‌های همدوس و پس از آن، در فضای فرمیونی برای هر دو حالت نسبیتی و غیر نسبیتی مورد بحث و بررسی قرار دهیم.

انتگرال مسیر فاینمن

به منظور یافتن تابع گرینی که به ازاء آن رابطهٔ

$$Q_N\left(t_b, x_{1b}, x_{2b}, ..., x_{Nb}\right) G_N\left(b;a\right) = \delta\left(t_b - t_a\right) \prod_{i=1}^{N} \delta\left(x_{ib} - x_{ia}\right) \qquad (۱)$$

همچنان برقرار باشد، می‌بایست سیستم کوآنتومی‌ای را با هامیلتونی $H_N\left(x_1, ..., x_N; p_1, ..., p_N\right)$ و معادلهٔ شرودینگر $Q_N \varphi = 0$ به گونه‌ای در نظر بگیریم که رابطهٔ زیر برقرار باشد [۵]:

$$Q_N\left(t; x_1, ..., x_N\right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + H_N \qquad (۲)$$

ارتباط انتشارگر و تابع گرین

انتشارگر در دینامیک کوانتومی نقش تابع گرین در دنیای الکترودینامیک را بازی می‌کند. به همین دلیل، یافتن انتشارگر گام مناسبی برای بدست آوردن تابع گرین است. با داشتن توزیع اولیه (تابع موج اولیه) و بهره‌گیری از انتشارگر می‌توان تابع موج را در هر زمان دیگری بدست آورد. در سیستم‌های غیر برهم‌کنشی یا همان سیستم‌های منزوی، با توجه به ساختار این‌گونه سیستم‌ها، یافتن انتشارگر برای تحلیل سیستم داده شده کفایت می‌کند.

انتشارگر چیزی جز نمایش مکانی عملگر تحول زمانی نیست. این کمیت را می‌توان با حل معادلهٔ زیر بدست آورد [۶]

$$Q_N\left(t_b; x_{1b}, ..., x_{Nb}\right) K_N\left(b, a\right) = 0 \qquad (۳)$$

شرط اولیه‌ای که برای محاسبهٔ انتشارگر می‌بایست در نظر گرفته شود، بدین صورت است

$$K_N\left(b, a\right) \to \prod_{i=1}^{N} \delta\left(x_{ib} - x_{ia}\right), t_b \to t_a + 0 \qquad (۴)$$

آنچه فاینمن انجام داد و مورد توجه نیز قرار گرفت این بود که نشان داد انتشارگر را می‌توان با بهره‌گیری از روشی موسوم به روش انتگرال‌مسیر بدست آورد؛ یعنی،

$$K(b,a) = \int_{x_{1a}}^{x_{1b}} ... \int_{x_{Na}}^{x_{Nb}} \exp[\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} L(t; x_1, ..., x_N) dt] Dx_1 ... Dx_N \qquad (۵)$$

مورد دیگری که از تلاش‌های فاینمن حاصل شد، یافتن ارتباط بین انتشارگر و تابع گرین بود. این ارتباط را می‌توان به صورت خلاصه، به شکل زیر نشان داد