کنفرانس بین المللی عمران، معماری و مدیریت توسعه شهری در ایران
تهران – دانشگاه تهران
مرداد ماه ۱۳۹۷

حل عددی معادلات بقا با استفاده از روش طیفی و حجم محدود

محسن حدادیان نژاد یوسفی[۱*]، سید حسین قریشی نجف‌آبادی[۲]، عمران توحیدی[۳]

۱- دانشکده مهندسی عمران، آب و محیط زیست، دانشگاه شهید بهشتی، ایران، تهران. m_hadadian@sbu.ac.ir
۲- دانشکده مهندسی عمران، آب و محیط زیست، دانشگاه شهید بهشتی، ایران، تهران. h_goreishi@sbu.ac.ir
۳- دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کوثر بجنورد، ایران، بجنورد. Etohidi110@yahoo.com

چکیده

در این مقاله به حل عددی معادلات بقاء هذلولی یک بعدی با دقت بالا، با تلفیق روش طیفی و روش حجم محدود پرداخته شده است. مبنای روش این گونه است که ابتدا بازه به تعدادی حجم تقسیم می‌شود و سپس هر حجم، بسته به مرتبه خطا، با استفاده از نقاط گاوس لاباتو به N قسمت تقسیم می‌شود و سپس با استفاده از توابع چبیشف نوع اول، تابع در هر حجم تقریب زده می‌شود. به دلیل ناپیوستگی بین حجم‌ها از حل تقریبی ریمان برای محاسبه فلاکس در مرز بین حجم‌ها استفاده شده است. یکی از مشکلات اساسی این معادلات وجود ناپیوستگی در حل است که باعث ایجاد نوسانات مازاد و یا به عبارتی پدیده گیبس می‌شود. برای حل این مشکل روش $KXRCF$ برای شناسایی حجم‌هایی که دارای ناپیوستگی می‌باشند، برای روش ارائه‌شده تطبیق داده شده و سپس برای از بین بردن نوسانات مازاد در حجم‌های دارای ناپیوستگی از روش TVD برای اصلاح این توابع استفاده شده است. دقت بالا و کارایی روش ارائه شده با حل معادلات یک بعدی پیوسته و ناپیوسته نشان داده شده است.

واژه‌های کلیدی: روش طیفی، حجم محدود، معادلات بقا، حل تقریبی ریمان، ناپیوستگی.

۱- مقدمه

در این مقاله معادله بقاء هذلولی با شرایط اولیه زیر در نظر گرفته شده است.

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}+\dfrac{\partial F(u)}{\partial x}=0 \quad x\in R,\;\; T>0,\\ u(x,0)=u_0(x).\end{cases} \tag{۱}$$

یکی از مشکلات اساسی این معادلات وجود ناپیوستگی در حل عددی بخصوص برای روش‌های عددی با مرتبه بالا (حتی با وجود شرایط اولیه پیوسته) است که باعث ایجاد نوسانات مازاد و یا به عبارتی پدیده گیبس در اطراف ناپیوستگی شده و در بعضی موارد باعث ناپایداری روش می‌شود. روش‌های عددی کلاسیک بر مبنای بسط تیلور در این شرایط توانایی حل این نوع معادلات را به دلیل وجود ناپیوستگی ندارند.

روش‌های عددی مختلفی با دقت بالا برای حل معادلات بقاء هذلولی در دو دهه اخیر ارائه شده است، از جمله می‌توان به روش‌های حجم محدود [۱-۱۰]، روش گالرکین ناپیوسته [۱-۱۵]، روش هیبرید حجم محدود و گالرکین ناپیوسته [۱۶-۱۹]، روش P_NP_M [۲۰-۲۱] و روش‌های طیفی [۲۲-۲۴] را نام برد. اگرچه روش‌های عددی با دقت بالا دارای پیچیدگی و زمان اجرای بیشتری نسبت به روش‌های معمول مرتبه دوم در یک گام زمانی هستند، ولی برای رسیدن به یک دقت برابر، دارای زمان اجرای کمتری است. در بین این روش‌ها، روش حجم محدود به دلیل سادگی نسبی و سرعت بیشتر نسبت به بقیه روش‌ها و همچنین به‌کارگیری راحت روش‌های انتگرال‌گیری ضمنی نسبت به زمان، دارای مزایای بهتری است.